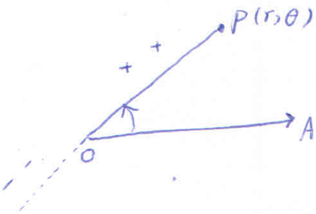
جلسه سوم

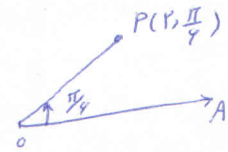
دستگاه مختصات قطبی :

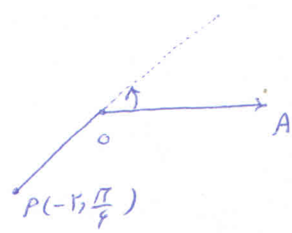
برای نشان دادن محل یک نقطه در صفحه از مختصات دکارتی تا حال استفاده می‌کردیم بدین ترتیب که زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی را برای نشان دادن آن معرفی می‌کردیم. چنین دستگاهی را دستگاه مختصات دکارتی می‌گوییم. دستگاه دیگری که برای نمایش محل یک نقطه به کار می‌بریم دستگاه مختصات قطبی است. ابتدا یک مبدأ به نام O انتخاب کرده و خطی افقی از O رسم می‌کنیم مطابق شکل زیر OA را محور قطبی می‌گیریم مختصات نقطه P در این دستگاه عبارت است از زوج مرتب (r,θ) که r فاصله جهت‌دار O تا P و θ زاویه جهت‌دار از OA تا OP است.

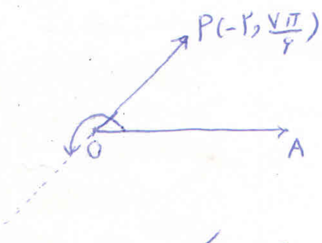


مثال: مختصات نقطه P داده شده محل آن را تعیین کنید.

الف: $P(+2, \frac{\pi}{6})$ ب: $P(-2, \frac{\pi}{6})$ ج: $P(-2, \frac{7\pi}{6})$







به طور کلی $P(2, \frac{\pi}{6})$, $P(-2, \frac{\pi}{6}+\pi+2n\pi)$ و $P(-2, \frac{\pi}{6}+2n\pi)$ همگی یکی هستند لذا نمایش قطبی یک نقطه منحصر به فرد نیست.

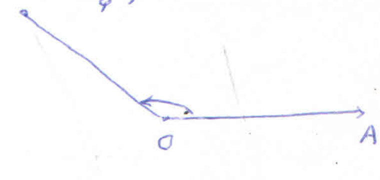
رابطه بین مختصات دکارتی و قطبی: فرض کنید (x,y) مختصات دکارتی نقطه P و (r,θ) مختصات قطبی P باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

مثال: نقطه $(3, \frac{5\pi}{6})$ را نشان دهید و سپس تمام مختصات قطبی دیگری برای آن پیدا کنید و مختصات آن را در صفحه مختصات دکارتی پیدا کنید.

$P(3, \frac{5\pi}{6})$ و $P(-3, -\frac{\pi}{6})$ و $P(3, -\frac{7\pi}{6})$

. $P(-3, \frac{11\pi}{6})$



ب) $x = 3\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$y = 3\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$

مثال: مختصات قطبی نقاط زیر را که مختصات دکارتی آنها داده است با شرط $0 \le \theta < 2\pi$ و $r > 0$ بدست آورید.

الف: $(1,-1)$: این نقطه در ربع چهارم قرار دارد و چون $r > 0$ لذا باید در $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ باشد

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow P(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$$

ب: $(-\sqrt{3}, 1)$: این نقطه در ربع دوم واقع است چون $r > 0$ لذا $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \quad \tan\theta = \frac{+1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow P(2, \frac{5\pi}{6})$$

مثال: معادله کارتی نموداری داده شده است معادله قطبی آن را بنویسید

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = a^2 \Rightarrow r^2=a^2 \Rightarrow r=|a|$$

مثال: معادله قطبی نموداری داده شده است معادله دکارتی آن را بنویسید

$$x^2+y^2=r^2 \qquad 4\sin\theta\cos\theta = 4 \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$r^2 = 2\sin 2\theta = 4\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 4\,\frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = 4xy$$

تمرین:

۱- تمامی نمایشهای مختصات قطبی $(-2, -\frac{\pi}{4})$ و $(-2, \frac{\pi}{3})$ را بنویسید

۲- مختصات دکارتی نقاط $(-1, -\frac{7\pi}{6})$ و $(-4, \frac{2\pi}{3})$ و $(1, \frac{\pi}{4})$ و $(-2, -\frac{\pi}{3})$ را بدست آورید

۳- مختصات قطبی نقاط $(2,-2)$ و $(-1,-\sqrt{3})$ و $(1,\sqrt{3})$ را با شرط $r>0$ و $0 \le \theta < 2\pi$ بدست آورید

۴- معادله قطبی نمودارهای داده شده را بدست آورید

الف: $x^2 = 4y^2$ ب: $x^2-4x+y^2=0$ ج: $x^2-y^2=16$

۵- معادله دکارتی نمودارهای داده شده را بدست آورید.

الف: $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$ ب: $r = 2\sin 3\theta$ ج: $r = 1-\sin\theta$

د: $r^2=\theta$ و: $r = \frac{4}{3-2\cos\theta}$

نمودار معادلات قطبی:

اگر $r=f(\theta)$ معادله قطبی یک منحنی باشد برای رسم نمودار آن رعایت نکات زیر بسیار سودمند است

الف: بررسی قوانین تقارن

ب: آیا منحنی از قطب عبور می‌کند

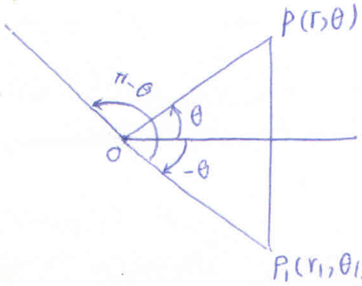
پ: اگر منحنی از قطب عبور می‌کند معادلات خطوط مماس بر منحنی در قطب را پیدا می‌کنیم

ت: تعیین نقاطی که r دارای ماکسیمم یا مینیمم می‌باشد.

برای تعیین اینکه آیا منحنی شامل قطب است یا نه کافی است $r=0$ قرار دهیم اگر معادله دارای جواب بود بدین معناست که منحنی از قطب عبور می‌کند به عنوان مثال منحنی $r=5-4\sin\theta$ از قطب عبور نمی‌کند زیرا معادله $\sin\theta=\frac{5}{4}$ دارای جواب نیست ولی منحنی $r=4-5\sin\theta$ از قطب عبور می‌کند. جوابهایی که از حل معادله $f(\theta)=0$ بدست می‌آید باشند $\theta=\theta_0$ معادله خطوط راستی هستند که از قطب می‌گذرند و در قطب بر منحنی مماس اند.

بررسی قوانین تقارن:

الف: تقارن نسبت به محور قطبی: اگر با تبدیل

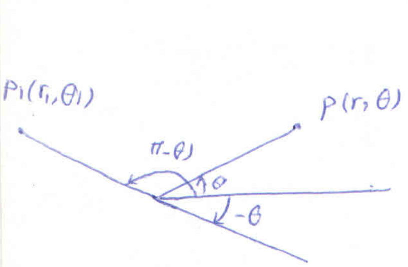


$(r,\theta)\rightsquigarrow(r,2n\pi-\theta)$

$(r,\theta)\rightsquigarrow(-r,\pi-\theta+2n\pi)$

معادله تغییر نکند گوییم نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است

ب: تقارن نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$: اگر با تبدیل

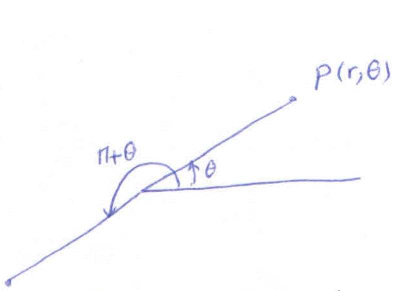


$(r,\theta)\rightsquigarrow(r,\pi-\theta+2n\pi)$

$(r,\theta)\rightsquigarrow(-r,2n\pi-\theta)$

معادله تغییر نکند گوییم نمودار نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است

ج: تقارن نسبت به قطب: اگر با تبدیل



$(r,\theta)\longrightarrow(r,\pi+\theta+2n\pi)$

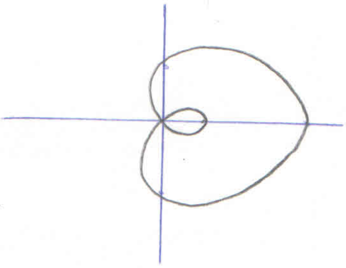
$(r,\theta)\rightsquigarrow(-r,2n\pi+\theta)$

معادله تغییر نکند گوییم نمودار نسبت به قطب متقارن است.

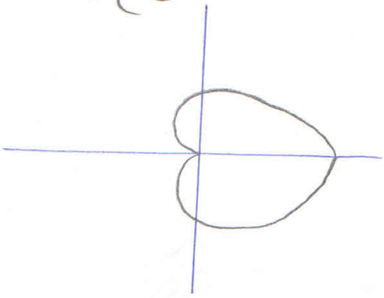
لیماسون : نمودار معادلات به صورت $r = a \pm b\sin\theta$ یا $r = a \pm b\cos\theta$ لیماسون نامیده می‌شود

در معادله $r = a \pm b\cos\theta$ اگر (r,θ) را با $(r,-\theta)$ جایگذاری کنیم معادله تغییر نمی‌کند پس نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است

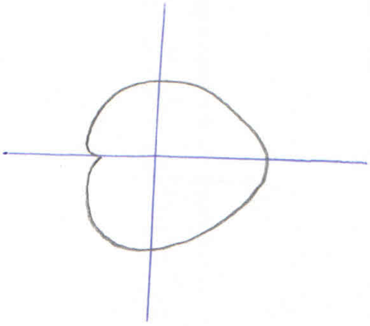
حالت اول : $r = a + b\cos\theta$ (کافی است نمودار را در $[0,\pi]$ رسم کنیم)



$a<b$

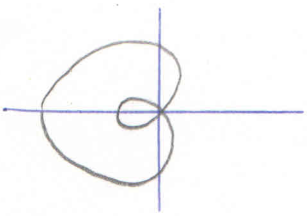


$a=b$

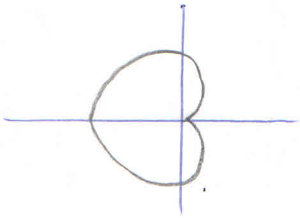


$a>b$

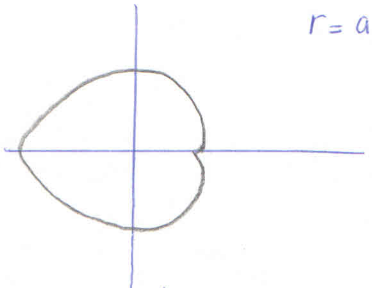
حالت دوم : $r = a - b\cos\theta$



$a<b$



$a=b$

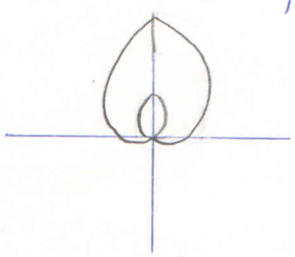


$a>b$

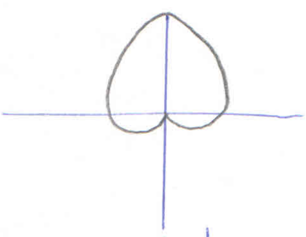
در معادله $r = a \pm b\sin\theta$ با تبدیل (r,θ) به $(r,\pi-\theta)$ معادله تغییری نمی‌کند لذا نمودار نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است.

حالت اول : $r = a + b\sin\theta$

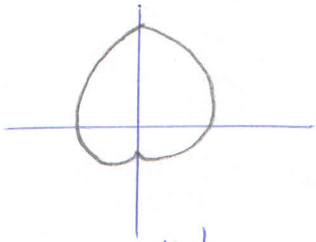
(کافی است نمودار را در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم)



$a<b$

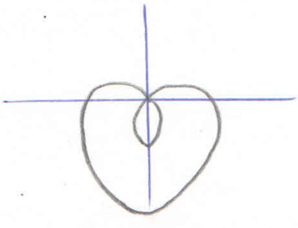


$a=b$

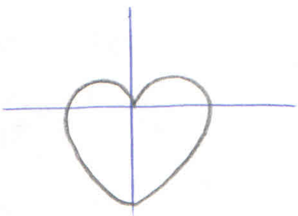


$a>b$

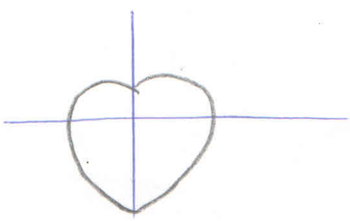
حالت دوم : $r = a - b\sin\theta$



$a<b$



$a=b$



$a>b$

در حالتی که $a=b$ نمودار را دلنما می‌نامیم

مثال : نمودار معادله $r = 2+\cos\theta$ را رسم کنید

الف : بررسی تقارن :

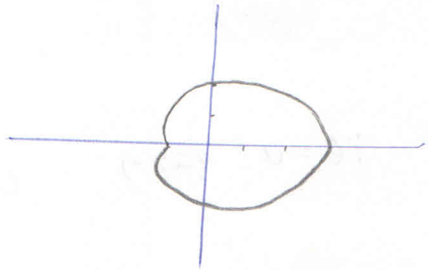
$(r,\theta) \to (+r,-\theta)$ نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است

ب : $r=0 \Leftarrow \cos\theta=-2$ نمودار از قطب نمی‌گذرد

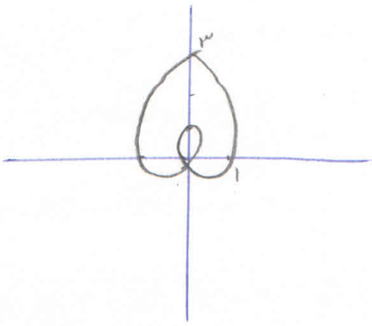
کافی است نمودار را در $[0,\pi]$ رسم کنیم و سپس با تقارن نسبت به محور قطبی کل نمودار را رسم کنیم

ت: بیشترین مقدار r به ازای $\theta = 0$ بدست می‌آید که برابر $r = 3$ است و کمترین مقدار ازای $\theta = \pi$ است که $r = 1$ است

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2+\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



مثال: $r = 1 + 2\sin\theta$



الف: $(r,\theta) \to (r, \pi - \theta)$ نمودار نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است

ب: $r = 0 \Leftarrow \sin\theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ منحنی از قطب می‌گذرد

پ: نمودار در مبدأ به خطوط $\theta = \frac{-\pi}{6}$ و $\theta = \frac{+7\pi}{6}$ مماس است

ت: ماکزیمم r در $\theta = \frac{\pi}{2}$ برابر ۳ و مینیمم آن در $\theta = \frac{-\pi}{2}$ برابر $r = -1$ است

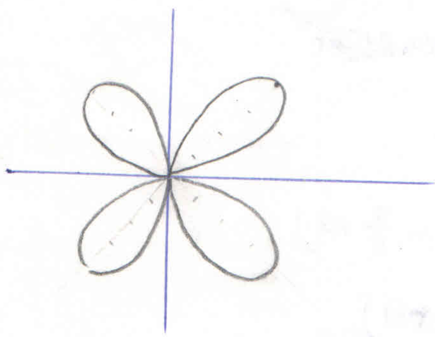
کافی است نمودار را در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	-1	$1-\sqrt{3}$	0	1	2	$1+\sqrt{3}$	3

نمودار معادلات به صورت $r = a\cos n\theta$ و $r = a\sin n\theta$ گل رز نامیده می‌شود اگر n فرد باشد دارای n پر است و اگر n زوج باشد دارای 2n پر است.

مثال: $r = 4\sin 2\theta$

الف: $(r,\theta) \to (r, \pi - \theta)$ و $(r,\theta) \to (-r, -\theta)$



با تبدیلات فوق معادله تغییر نمی‌کند لذا نمودار نسبت به محور قطبی و محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است

ب: $r = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 , \theta = \frac{\pi}{2}$ نمودار از قطب می‌گذرد

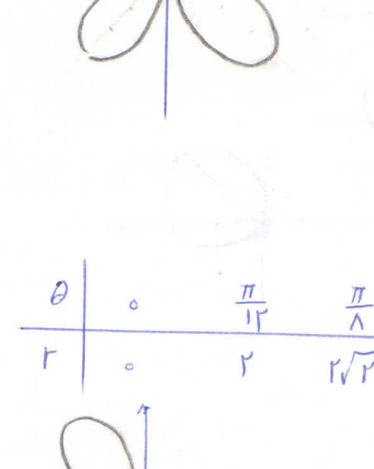
پ: نمودار در قطب به خطوط $\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ مماس است

ت: $r_{max} = 4$, $r_{min} = -4$ به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \frac{-\pi}{4}$ بدست می‌آید

کافی است نمودار را در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0

مثال: $r = 3\cos 3\theta$



الف: $(r,\theta) \to (r, -\theta)$ نسبت به محور قطبی متقارن است

ب: $r = 0 \Rightarrow \cos 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ نمودار از قطب می‌گذرد

ت: $\theta = 0 \Rightarrow r = 3$, $\theta = \pi \Rightarrow r = -3$

۱- مختصات دکارتی نقاط $(-1, \frac{-7\pi}{6})$ و $(-4, \frac{2\pi}{3})$ و $(1, \frac{\pi}{4})$ و $(-2, \frac{-\pi}{3})$ را به دست آورید

۲- مختصات قطبی نقاط $(2, -2)$ و $(-1, -\sqrt{3})$ و $(1, \sqrt{3})$ را با شرط $r>0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ به دست آورید.

۳- معادلات قطبی نمودارهای داده شده را به دست آورید

الف : $x^3 = 4y^2$　　ب : $x^2 - 4x + y^2 = 0$　　ج : $x^2 - y^2 = 16$

۴- معادلات دکارتی نمودارهای داده شده را به دست آورید

الف : $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$　　ب : $r = 2\sin 3\theta$　　ج : $r = 1 - \sin\theta$

د : $r^2 = \theta$　　و : $r = \frac{4}{3-2\cos\theta}$

۵- نمودار معادلات داده شده را رسم کنید

۱) $r = 3\sin 3\theta$　　۲) $r^2 = 9\sin 2\theta$　　۳) $r = 2 + 2\cos\theta$

۴) $r = 6\cos 2\theta$　　۵) $r = 3 + 2\cos\theta$　　۶) $r^2 = -9\sin 2\theta$

۷) $r = 2 + 3\sin\theta$

۶- نقاط تلاقی هر زوج از معادلات داده شده را به دست آورید.

الف) $\begin{cases} r^2 = 8\sin 2\theta \\ r = 2 \end{cases}$　　ب) $\begin{cases} r = 1 - \sin\theta \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$

ج) $\begin{cases} r^2 \sin 2\theta = 8 \\ r\cos\theta = 2 \end{cases}$　　د) $\begin{cases} r = 1 + \cos 2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

۷- نمودار $r = 1 + 2\cos 2\theta$ خودش را قطع می‌کند نقاط تقاطع را پیدا کنید

۸- ثابت کنید برای تمامی مقادیر a و b خطوط مماس در هر یک از نقاط تقاطع منحنی‌های زیر متعامدند $(\cot\alpha = 0)$

$r = a(1 + \sin\theta)$, $r = b(1 - \sin\theta)$

۹- نقاطی از منحنی $r = 2(1 + \cos\theta)$ را پیدا کنید که خط مماس در آنها افقی باشد $(\tan\alpha = 0)$

۱۰- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 2 + \sin\theta$ را در $(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{6})$ به دست آورید