جلسه ششم

مراجع: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی نوشته جرج توماس، راس فینی (جلد دوم)

حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشته: سیلورمن (جلد دوم)

بردارها: پاره خط جهت دار واقع در صفحه را یک بردار گویند. دو بردار را یکی در نظر می گیریم هرگاه طول و جهتشان یکی باشد (دارای طولهای مساوی، موازی و هم جهت باشند).

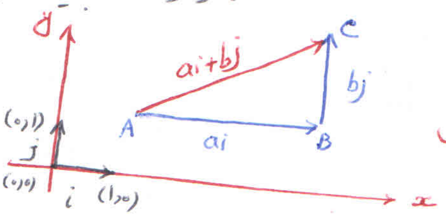
جمع هندسی: قانون متوازی الاضلاع:

$$V_1 = \vec{AB} \quad , \quad V_2 = \vec{BC} \Rightarrow V_1+V_2 = \vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}$$

مولفه ها: اگر $V = V_1+V_2$ باشد V_1 و V_2 را مولفه های V می گویند.

بردارهای پایه: هر بردار را با مولفه های آن که موازی با محورهای یک دستگاه مختصات دکارتی می باشند در نظر می گیریم. بدین منظور روی هر دو محور یک واحد طول در نظر گرفته، این بردارهای واحد (i , j) را بردارهای پایه گویند. بدین ترتیب هر برداری مثل $\vec{AC}$ را می توان به صورت مجموع مضربی از i و مضربی از j بیان کرد.

$$V = \vec{AC} = ai + bj$$



بردارهای ai و bj را مولفه های برداری V در جهات i و j

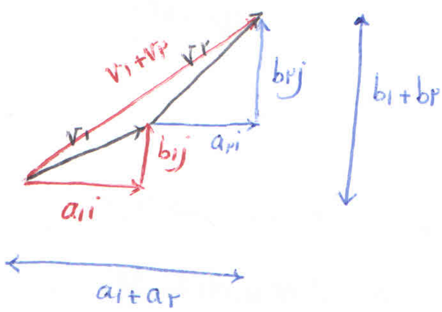
و اعداد a و b را مولفه های عددی V در جهات i و j نامیم.

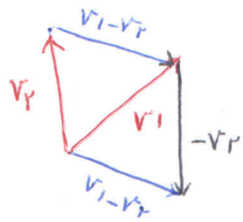
تساوی دو بردار:

$$ai + bj = a'i + b'j \Leftrightarrow a=a' , b=b'$$

جمع دو بردار: قرینه هر بردار V_2، بردار $-V_2$ است با طول برابر V_2 و با جهتی مخالف جهت V_2.

$$V_1 = a_1 i + b_1 j$$
$$V_2 = a_2 i + b_2 j$$
$$\Rightarrow V_1+V_2 = (a_1+a_2)i + (b_1+b_2)j$$
$$V_1 - V_2 = (a_1-a_2)i + (b_1-b_2)j = V_1 + (-V_2)$$





طول بردار:

$$V = ai+bj \Rightarrow |V| = \sqrt{a^2+b^2}$$

ضرب اسکالر در یک بردار:

$$V = ai+bj \Rightarrow c(ai+bj) = (ca)i + (cb)j = cV$$
$$|cV| = \sqrt{c^2a^2+c^2b^2} = |c|\sqrt{a^2+b^2} = |c||V|$$

اگر $c>0$ در این صورت cV هم جهت V است و اگر $c<0$ آنگاه cV مخالف جهت V است. اگر $c=0$ بردار cV جهتی ندارد.

بردار واحد: هر برداری که طولش برابر واحد طول مختصات باشد بردار واحد نام دارد. بردارهای i و j واحدند زیرا $|i| = |1i+0j| = 1$ ، $|j| = 1$

حال اگر بردار واحدی را به اندازه زاویه θ دوران بدهیم آنگاه مولفه افقی u، $u_x = \cos\theta$ و مولفه عمودی آن $u_y = \sin\theta$.

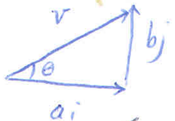
لذا $u = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$

جهت : $\text{جهت } A = \dfrac{A}{|A|}$ این بردار، برداری یکه است. بردار صفر جهتی را تعریف نمی کند

دو بردار ناصفر A و B جهتی یکسان دارند $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{A}{|A|} = \dfrac{B}{|B|}$ یا $A = \dfrac{|A|}{|B|} B$

شیب، مماس و قائم :

دو بردار را موازی گویند هرگاه مضارب عددی مثبت یا منفی یکدیگر باشند به بیان دیگر پاره خطهای نشان دهنده آنها موازی باشند



اگر $v = ai + bj$ در این صورت شیب بردار v را با $\frac{b}{a}$ نشان می دهیم $\qquad \frac{b}{a} = \tan\theta$

وقتی می گوییم برداری در نقطه ای بر یک منحنی مماس و یا بر آن قائم است به این معناست که آن بردار موازی یا عمود بر خطی است که در آن نقطه بر منحنی مماس است

مثال : بردارهای یکه مماس و قائم بر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ را در نقطه $(1,1)$ بیابید.

$y' = \frac{3x^2}{2}$

بردارهای واحدی را می یابیم که موازی یا عمود بر خط مماس بر منحنی در نقطه $(1,1)$ باشند

$$\text{شیب خط مماس در } (1,1) = y'\Big|_{x=1} = \frac{3x^2}{2}\Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

لذا بردارهای واحدی می یابیم که شیبی برابر مقدار $\frac{3}{2}$ داشته باشند

$v_1 = 2i + 3j$

$|v_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

زیرا هر مضرب ناصفر v_1 دارای شیب $\frac{3}{2}$ است چون یکه نیست

$v_1' = \frac{2}{\sqrt{13}} i + \frac{3}{\sqrt{13}} j \qquad |v_1| = 1$

$v_2 = -v_1 = \frac{-2}{\sqrt{13}} i - \frac{3}{\sqrt{13}} j \qquad |v_2| = 1$

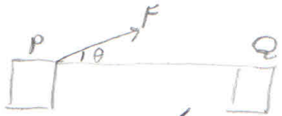
برای یافتن بردارهای قائم این بردارها باید شیبی برابر $-\frac{2}{3}$ داشته باشند

$w_1 = 3i - 2j \qquad |w_1| = \sqrt{13}$

$w_2 = -3i + 2j \qquad |w_2| = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{3}{\sqrt{13}} i - \frac{2}{\sqrt{13}} j$$

$$w_2 = \frac{-3}{\sqrt{13}} i + \frac{2}{\sqrt{13}} j$$



$W = |F| \cos\theta \, |\overrightarrow{PQ}|$

محاسبه کار

ضرب عددی دو بردار : θ کوچکترین زاویه ای است که A و B وقتی ابتدایشان بر هم منطبق است با هم می سازند

$$A \cdot B = |A||B| \cos\theta$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|}$$

$$A \cdot A = |A||A| \cos 0 = |A|^2 \Longrightarrow |A| = \sqrt{A \cdot A}$$

$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k \qquad \Rightarrow A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$(i^2 = j^2 = k^2 = 1)$

$A\cdot B = B\cdot A$

قوانین ضرب داخلی:

$(cA)\cdot B = A\cdot(cB) = c(A\cdot B)$ $\quad c\in R$

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

$(A+B)\cdot(C+D) = A\cdot C + A\cdot D + B\cdot C + B\cdot D$

طول تصویر برداری B بر A برابر است با $|B|\cos\theta$

$|B|\cos\theta = \frac{A\cdot B}{|A|} = B\cdot \underbrace{\frac{A}{|A|}}_{\text{جهت } A}$ (مولفه عمودی B در جهت A)

تصویر برداری B بر A: (برداری) $\quad \mathrm{proj}_A B = \underbrace{\frac{A\cdot B}{A\cdot A}}_{\text{عدد}} \underbrace{A}_{\text{بردار}}$

بردارهای متعامد: از $A\cdot B = |A||B|\cos\theta$ می‌توان دریافت که هرگاه $|A|\neq 0$ و $|B|\neq 0$ آنگاه

$A\cdot B = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (بردار صفر بر هر برداری عمود است)

زاویه بین دو خم: زاویه بین دو خم مستوی در یک نقطه تقاطع آنها عبارتست از زاویه بین خطهای مماس بر آنها در آن نقطه.

مثال:

زاویه بین بردارهای آنهاست

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow$$

$5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$

$y = \frac{-2}{5}$

$a = (2,-1)$

$b = (3,1)$

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|} = \frac{6-1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

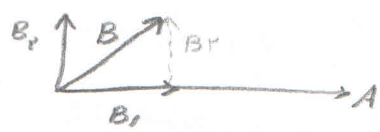
ضرب برداری دو بردار:

$A\times B = \vec{n}\,|A||B|\sin\theta$

$A\times B = 0 \Leftrightarrow$ A و B موازی باشند $(\theta = 0)$ یا $A=0$ یا $B=0$ یا $A=B=0$

$-(A\times B) = (B\times A)$

$A\times B$ بر A و B عمود است



$i\times j = -(j\times i) = k$

$j\times k = -(k\times j) = i$

$k\times i = -(i\times k) = j$

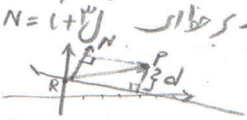
$i\times i = j\times j = k\times k = 0$

$B_1 = \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A \qquad B_2 = B - B_1 = B - \frac{A\cdot B}{A\cdot A}A$

$B = B_1 + B_2$

فاصله نقطه $P(4,3)$ تا خط $x+3y=6$ را بدست آورید.

طول تصویر برداری $\overrightarrow{RP}$ بر N است که N بردار عمود بر خط است $N = i+3j$

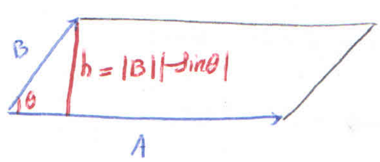


$R = (0,2)$

$d = |\mathrm{proj}_N \overrightarrow{RP}| = |RP\cdot \frac{N}{|N|}| = \frac{7\sqrt{10}}{10}$

محاسبه مساحت متوازی الاضلاع و مثلث:

$S = |A||B||\sin\theta| = |A\times B|$



مساحت مثلث نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

قوانین ضرب برداری: در ضرب برداری قانون شرکت پذیری برقرار نیست

۱- قانون توزیع پذیری عددی

$(rA)\times(sB) = (rs)A\times B$

۲- قانون توزیع پذیری برداری

$A\times(B+C) = (A\times B) + (A\times C)$

$(B+C)\times A = (B\times A) + (C\times A)$

فرمول دترمینانی : $A\times B$

اگر $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ و $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ در این صورت داریم

$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

معادلات خط‌ها و صفحه در فضا :

هرگاه L خطی باشد در فضا ۳ بعدی که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد و موازی با بردار $v = Ai + Bj + Ck$ باشد، لذا L شامل تمام نقاط $P(x, y, z)$ است، بگونه‌ای که $\overrightarrow{P_0P} \parallel v$ یا $\overrightarrow{P_0P} = tv$

$$\Rightarrow (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k = t(Ai + Bj + Ck)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = tA & \Rightarrow x = x_0 + tA \\ y - y_0 = tB & \Rightarrow y = y_0 + tB \\ z - z_0 = tC & \Rightarrow z = z_0 + tC \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط گذرنده از P_0 و موازی v.

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

فاصله یک نقطه از یک خط :

گام اول: نقطه Q را روی خط L چنان پیدا می‌کنیم که کمترین فاصله تا P را داشته باشد.

گام دوم: فاصله P تا Q را محاسبه می‌کنیم.

مثال: فاصله نقطه $P(1,1,5)$ را تا خط $x = 1+t$, $y = 3-t$, $z = 2t$ بیابید.

حل: نقطه دلخواه Q به ازای t ای در نظر می‌گیریم $Q(1+t, 3-t, 2t)$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(1+t-1)^2 + (3-t-1)^2 + (2t-5)^2}$$

$$\Rightarrow d^2 = f(t) = 6t^2 - 24t + 29 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 12t - 24 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 12 > 0$$

لذا f در $t=2$ دارای مینیمم است. لذا نقطه مورد نظر $Q(3,1,4)$ است.

گام دوم:

$$d(P,Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$$

فاصله نقطه P را از خط $L = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ برابر $d = \frac{|u \times \overrightarrow{P_0P}|}{|u|}$ که در آن $u(a,b,c)$ بردار هادی، $P_0(x_0, y_0, z_0)$

معادله صفحه :

اگر M صفحه‌ای در فضا باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار ناصفر $N = Ai + Bj + Ck$ عمود باشد لذا M مجموع نقاطی مانند $P(x, y, z)$ است که $N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ یعنی

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Ck = Ax_0+By_0+Cz_0$$

مثال : معادله صفحه‌ای را بیابید که از $P_0(-3, 0, 7)$ بگذرد و بر $N = 5i+2j-k$ عمود باشد.

$$5x+2y-z = 5(-3)+2(0)+7(-1) = -22$$

مثال : معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقاط $A(0,0,1)$ و $B(2,0,0)$ و $C(0,3,0)$ بگذرد.

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 3, -1)$

$$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3i+2j+6k$$

یکی از نقاط مثل A را در نظر گرفته و معادله صفحه را می‌نویسیم

$$3x+2y+6k = 3(0)+2(0)+6(1)=6$$

مثال : نقطه تقاطع خط $x = \frac{8}{3}+2t$ ، $y=-2t$ ، $z=1+t$ و صفحه $3x+2y+6z=6$ را بیابید.

هر (نقطه تقاطع) $(\frac{8}{3}+2t, -2t, 1+t)$ از خط را انتخاب کرده و در معادله صفحه جایگذاری کرده، t را بدست آورده $t=-1$ لذا محل تقاطع $(\frac{8}{3}-2, 2, 1-1)=(\frac{2}{3}, 2, 0)$ می‌باشد.

زاویه بین دو صفحه و فصل مشترک دو صفحه

زاویه بین دو صفحه : زاویه بین دو صفحه زاویه بین بردارهای نرمال (عمود) دو صفحه است.

مثال : زاویه بین دو صفحه $3x-6y-2z=15$ و $2x+y-2z=5$ را پیدا کنید.

$N_1 = 3i-6j-2k$, $N_2 = 2i+j-2k$

$|N_1| = \sqrt{9+36+4} = 7$

$|N_2| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$\cos\theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} = \frac{6-6+4}{21} = \frac{4}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21}$$

مثال : برداری موازی فصل مشترک دو صفحه $3x-6y-2z=15$ و $2x+y-2z=5$ را بیابید.

هر بردار موازی فصل مشترک موازی هر یک از صفحات و لذا عمود بر بردار نرمال هر دو صفحه است لذا $v = N_1 \times N_2$ و هر مضرب آن می‌تواند باشد

$$v = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14i+2j+15k$$

مثال: معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه $3x-6y-2z=15$ و $2x+y-2z=5$ را بیابید.

برای نوشتن معادله فصل مشترک دو صفحه کافی است نقطه‌ای از فصل مشترک و برداری موازی با فصل مشترک را داشته باشیم.

طبق مثال قبل بردار $v = 14i + 2j + 15k$ موازی فصل مشترک دو صفحه است.

برای بدست آوردن نقطه‌ای روی فصل مشترک به عنوان مثال $z=0$ قرار داده و یک دستگاه دو معادله دو مجهول

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-6y=15 \end{cases} \quad x=3,\ y=-1$$

لذا نقطه $(3,-1,0)$ روی فصل مشترک است بنابراین معادلات پارامتری فصل مشترک به صورت

$$x = 3+14t,\quad y = -1+2t,\quad z = 0+15t$$

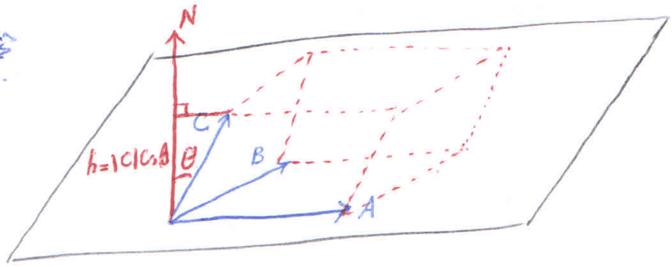
می‌باشد.

ضرب سه‌تایی از سه بردار: (ضرب عددی سه‌گانه یا جعبه‌ای)

$|(A\times B)\cdot C|$ = حجم متوازی السطوح

$$(A\times B)\cdot C = |A\times B|\,|C|\cos\theta$$

لذا می‌توان نوشت



$$(A\times B)\cdot C = (B\times C)\cdot A = (C\times A)\cdot B \quad (1)$$

نکته: چون ضرب نقطه‌ای خاصیت تعویض‌پذیری دارد از (1)

$$(A\times B)\cdot C = A\cdot(B\times C)$$

به عبارت دیگر در ضرب عددی سه‌گانه جای $\times$ و $\cdot$ را می‌توان تعویض کرد.

$$A\cdot(B\times C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال: مطلوب است حجم متوازی السطوحی با اضلاع $A = i+2j-k$ و $B=-2i+3k$ و $C=7j-4k$.

$$A\cdot(B\times C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23 \Rightarrow V = 23 = |-23|$$

ضرب برداری سه بردار:

$$(A\times B)\times C = \underbrace{(A\cdot C)}_{\text{عدد}}B - \underbrace{(B\cdot C)}_{\text{عدد}}A$$

فرمول فاصله یک نقطه از یک صفحه بر حسب مختصات : فاصله نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ برابر

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال : فاصله نقطه $(1,3,2)$ را از صفحه $x+y+z+2=0$ را بیابید. همچنین معادلات خطی را بنویسید که از این نقطه می‌گذرد و بر این صفحه عمود است.

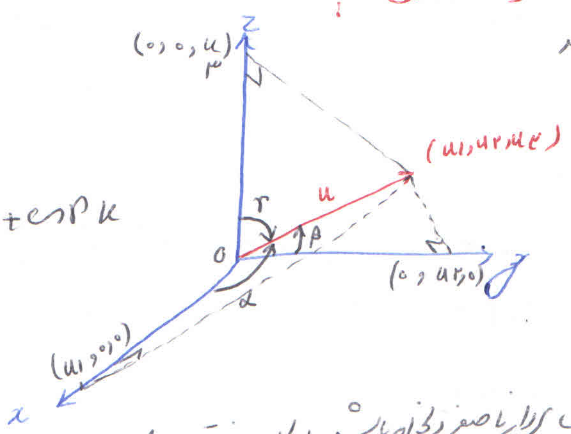
$$d=\frac{1+3+2+2}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$$

بردارهای جهت و کسینوس‌های هادی :

اگر u برداری واحد باشد

$$u\cdot i=u_1=|u||i|\cos\alpha=\cos\alpha$$
$$u\cdot j=u_2=|u||j|\cos\beta=\cos\beta$$
$$u\cdot k=u_3=|u||k|\cos\gamma=\cos\gamma$$
$$\Rightarrow u=u_1 i+u_2 j+u_3 k=\cos\alpha\, i+\cos\beta\, j+\cos\gamma\, k$$



حال اگر A یک بردار غیر صفر دلخواه باشد در این صورت A در جهت $u=\frac{A}{|A|}$ با محورهای مختصات زوایایی را می‌سازد

برای یافتن cos های این زوایا کافی است مولفه‌های بردار واحد u را بیابیم

$$\frac{A}{|A|}=\cos\alpha\, i+\cos\beta\, j+\cos\gamma\, k$$

این cos ها را cos های هادی A می‌نامند. به عبارت دیگر cos های هادی A عبارتند از مولفه‌های جهت A.

۱- معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطه (۷،۰،۰) و خط $x = 1+\frac{2}{\sqrt{42}}t$ ، $y = -2-\frac{7}{\sqrt{42}}t$ و $z = 1-\frac{3}{\sqrt{42}}t$ باشد

۲- نقطه‌های $A(2,0,5)$ و $B(1,-2,4)$ را در نظر بگیرید از AC صفحه‌ای بر خط AB عمود شده است معادله صفحه را بنویسید

۳- عدد t را طوری تعیین کنید که بردارهای زیر بر هم عمود باشند

$$OA = 2i - 3tj + 2k \quad , \quad OB = 4i + 2tj + 5k$$

۴- معادله برداری و دکارتی خط تلاقی دو صفحه $10x + 12y + 15z = 60$ و $x - y + 2z = 4$ را پیدا کنید

۵-