ریاضی کاربردی

جلد اول

ماتریس :

تعریف : آرایشی از mn عدد را که در m سطر و n ستون مرتب شده اند را یک ماتریس $m\times n$ می نامیم. ماتریسها را با حروف بزرگ لاتین A، B، ... نشان می دهیم. هریک از mn عدد مذکور را یک درایه ماتریس می نامیم. درایه کلی ماتریس را با حروف کوچک لاتین همراه با زیرنویس یا اندیس نشان می دهیم. درایه واقع در محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با a_{ij} نمایش می دهیم. بنابراین ترتیب ماتریس $m\times n$ ای چون A را می توان به صورت زیر نشان داد

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \qquad \begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix}$$

تعریف : اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{p\times q}$ دو ماتریس دلخواه باشند آنگاه گوییم A و B برابرند اگر و تنها اگر

i) $m=p$, $n=q$

ii) برای هر $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$

جبر ماتریسها :

جمع ماتریسها : اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{p\times q}$ دو ماتریس باشند آنگاه $A+B$ زمانی تعریف می شود که $m=p$ و $n=q$ باشد در این صورت داریم

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

ضرب عددی (اسکالر) اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $\alpha\in R$ در این صورت داریم $\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$

ضرب ماتریسها : اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{p\times q}$ دو ماتریس باشند آنگاه AB زمانی تعریف می شود که $n=p$ در این صورت AB یک ماتریس $m\times q$ است که به صورت $AB=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times q}$ تعریف می شود

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}_{2\times 2}$ و $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}_{2\times 3}$، $2A$ و AB را بدست آورید.

$$AB=\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}}\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}}=\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix}4&3&4\\6&3&0\end{bmatrix}}$$

$$2A=\begin{bmatrix}2&4\\6&0\end{bmatrix}$$

معرفی چند نوع ماتریس خاص :

ماتریس صفر : ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر هستند

ماتریس واحد (همانی) : ماتریس مربعی $n\times n$ که برای هر $1 \le i \le n$ داریم $a_{ii} = 1$ و بقیه درایه‌های آن صفر اند را ماتریس همانی نامیده و با $I_{n\times n}$ نمایش می‌دهیم

ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی $n\times n$ است که برای $i \neq j$ داریم $a_{ij} = 0$ (درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر اند)

ماتریس پایین مثلثی : ماتریس مربعی است که برای $i < j$ داریم $a_{ij} = 0$ (درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر اند)

ماتریس بالا مثلثی : ماتریس مربعی است که برای $i > j$ داریم $a_{ij} = 0$ (درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر اند)

ماتریس وارون (معکوس) : اگر $A = (a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد آنگاه یک ماتریس $B = (b_{ij})_{n\times n}$ را که در $AB = I_n = BA$ صدق می‌کند ماتریس وارون ماتریس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهیم .

ماتریس ترانهاده : اگر $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه ترانهاده ماتریس A را با A^t نمایش داده و به صورت $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ تعریف می‌شود یعنی A^t از جابجا کردن سطرها و ستونهای A حاصل می‌شود .

تعریف : (دترمینان) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ عدد $ad - bc$ را دترمینان A نامیده و با $\det A$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم

تعریف : برای ماتریس 3×3 ای چون $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ و درایه a_{ij} از آن ماتریس 2×2 حاصل از حذف سطر و ستونی که a_{ij} در آن قرار دارد را کهاد a_{ij} نامیده و با M_{ij} نشان می‌دهیم. منظور از همساره درایه a_{ij} عبارت است از عدد

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

تعریف : هرگاه A ماتریس 3×3 ای باشد $\det A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

نکته : مقدار دترمینان یک ماتریس به سطر یا ستونی که دترمینان حول آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد و مقداری ثابت است

مثال : دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید .

حول سطر اوّل :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \det A = 1(-3) + 2(-2) + 3(1) = -4$$

روش دوم محاسبه دترمینان ماتریسهای 3×3 (روش ساروس)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1-4+0) - (-3+0+4) = -4$$

خواص دترمینان :

۱) اگر $k \in R$ در این صورت $\det kA = k \det A$

۲) اگر ماتریس B از تعویض جای دو سطر (ستون) A بدست آمده باشد آنگاه $\det B = -\det A$

۳) اگر دو سطر یا دو ستون A برابر باشند آنگاه $\det A = 0$

۴) اگر درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس A صفر باشند همگی آنگاه $\det A = 0$

۵) اگر ماتریس A بالا (پایین) مثلثی باشد آنگاه $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (دترمینان برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی A است)

۶) دترمینان ماتریس همانی (واحد) برابر یک است.

۷) اگر سطر حاصل از ضرب یک عدد ثابت در یک سطر را با سطر دیگری جمع بزنیم دترمینان ماتریس حاصل با ماتریس اولیه A یکی خواهد بود . (در مورد ستونها نیز صادق است)

مثال : ثابت کنید $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

با جمع کردن (-1) برابر ستون دوم با ستون اول و جمع کردن (-1) برابر ستون سوم با ستون دوم داریم

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{bmatrix} = 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x-y & y-z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)(y+z) - (y-z)(x-y)(x+y) =$$

$$(x-y)(y-z)(y+z-x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

تمرین: نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} a+b & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & a \cdots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & a & a+b \end{bmatrix} = (na+b)b^{n-1}$$

حل: تمام ستونها را به ستون اول اضافه می‌کنیم در این صورت ماتریس

$$\det \begin{bmatrix} na+b & a & \cdots & a \\ na+b & a+b & a \cdots & a \\ \vdots & & & \vdots \\ na+b & a & \cdots & a+b \end{bmatrix} = (na+b)\det \begin{bmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a+b & \cdots & a \\ 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & a+b \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد سطر اول را از تمام سطرها کم می‌کنیم لذا داریم

$$= (na+b)\det \begin{bmatrix} 1 & a & \cdots & & a \\ 0 & b & a & \cdots & a \\ \vdots & 0 & b & a \cdots & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} = (na+b)b^{n-1}$$

تمرین: ۱- معادله‌های زیر را حل کنید

الف:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 3 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

ب)

$$\begin{vmatrix} x^2+2x & x & x^2+3 \\ 0 & x^2 & x^3+17 \\ 0 & 0 & x+7 \end{vmatrix} = x^5+95$$

۲- دترمینان ماتریس

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{bmatrix}$$

را بدست آورید

۳- با استفاده از خواص دترمینانها ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$$

۴- بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

۵- بدون بسط ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

۶- بدون بسط ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

۷- ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = x+y+z+1$$

۸- بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix} = 0$$

تعریف: (ماتریس الحاقی) فرض کنید $A=(a_{ij})$ ماتریسی $n\times n$ و A_{ij} همسازه درایه ij ام a_{ij} آن باشد ماتریس

$adj\, A = (A_{ij})^t$ را ماتریس الحاقی A می‌نامیم.

در این صورت اگر $\det A \neq 0$ آنگاه A وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است و داریم:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj\, A}{\det A}}$$

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ را بیابید.

$$A_{11} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -3 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -2 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = +4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$adj\, A = \begin{bmatrix}-3 & +4 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -4 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \det A = -4 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -1 & \frac{-1}{4}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی n مجهولی: منظور از یک دستگاه معادلات خطی متشکل از m معادله و n متغیر (مجهول) $x_1, \dots, x_n$ عبارت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{cases}$$

است که در آن a_{ij}ها و b_iها اعداد معلومی هستند.

a_{ij}ها را ضرایب این دستگاه معادلات و b_iها را ضرایب ثابت این دستگاه می‌نامیم. این دستگاه را می‌توان به صورت فشرده

با یک معادله ماتریسی $Ax=b$ نمایش داد که در آن $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ و $b=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$

منظور از حل یک دستگاه یافتن n-تایی مرتب $(x_1, \dots, x_n)$ است که توأماً در هر یک از معادلات دستگاه صدق کند.

روش حل دستگاه معادلات خطی سه مجهولی :

اگر ماتریس مربع A دارای معکوس باشد آنگاه معادله ماتریسی $AX = B$ فقط یک جواب دارد. این جواب عبارت است از $X = A^{-1}B$

مثال : دستگاه معادلات زیر را با استفاده از وارون ماتریس حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 18 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det A = (-1) - (1) = -2 \neq 0$$

$A_{11} = -1 \qquad A_{12} = -1 \qquad A_{13} = -1$

$A_{21} = -1 \qquad A_{22} = 1 \qquad A_{23} = -1$

$A_{31} = 1 \qquad A_{32} = -1 \qquad A_{33} = -1$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{17}{2} \\ \frac{33}{2} \end{bmatrix}$$

فضای برداری R^n :

فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. مجموعه n ـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی را با R^n نمایش می‌دهیم و داریم :

$$R^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in R, \dots, x_n \in R \}$$

مثلاً مجموعه ۲ ـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی R^2 عبارت است از : $R^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in R \}$

روی R^n اعمال جمع و ضرب اسکالر را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

هر عضو R^n را یک بردار n ـ بعدی یا به اختصار یک بردار می‌نامیم. در بردار $V = (x_1, \dots, x_n)$ متعلق به R^n عددهای $x_1, \dots, x_n$ را به ترتیب مولفه‌های اول، دوم تا n ـ ام V می‌نامیم.

تعریف : اگر $V_1, \dots, V_n$ بردارهایی در R^n و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعدادی حقیقی باشند در این صورت $W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n$ را یک ترکیب خطی $V_1, \dots, V_n$ می‌نامیم.